Devoir Maison I

Exercice 1. *Parallélisation des formules*

On rappelle un résultat de Brent, Kuck et Maruyama vu en cours.

Proposition (I). *Si P est calculé par une formule arithmétique de taille s alors, il existe une formule de taille poly(s) et profondeur $O(\log s)$ qui calcule P.*

Dans tout cet exercice, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble de n variables, t est une variable. De plus d est le degré du polynôme calculé. On supposera en plus que d est toujours plus petit que le nombre de variables du polynôme.

1. On a vu que les circuits arithmétiques pouvaient être parallélisées à la profondeur $O(\log d)$. En déduire que si P est calculé par une formule arithmétique de taille s alors, il existe une formule (d'arité non bornée) de taille $\mathrm{poly}(s)^{O(\log d)}$ et profondeur $O(\log d)$ qui calcule P.

2. Considérons le cas où P est calculé par une formule en forme de peigne :

$$P(\mathbf{x}) = x_1 + (x_2 * (x_3 + (x_4 * (\cdots))))$$

   Quelle est la profondeur de la formule ci-dessus ? Montrer qu'il existe une formule de taille $\mathrm{poly}(n)$ et de profondeur constante qui calcule P (Indice : compter le nombre de monômes).

3. Montrer que si $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, t]$ est calculé par une formule de taille s et profondeur Γ, alors pour tout $0 \le i \le d$, il existe une formule (d'arité non bornée) de taille $\mathrm{poly}(s)$ et profondeur au plus $\Gamma + 1$ qui calcule le coefficient du monôme t^i dans P.

4. En utilisant le résultat vu en cours sur l'homogénéisation des formules de petit degré, montrer que si P a degré $d = o(\log s)$, alors la conclusion de Proposition (I) peut être améliorée : la profondeur peut être réduite à $O(d) = o(\log s)$.

Le degré syntaxique δ de chaque porte d'une formule est définie récursivement :

$$\delta(\text{constante}) = 0;\ \delta(\text{variable}) = 1;\ \delta(a+b) = \max(\delta(a), \delta(b));\ \delta(a \times b) = \delta(a) + \delta(b).$$

Le degré syntaxique d'une formule est le degré syntaxique de sa sortie. On remarque que δ est au moins le degré du polynôme calculé.
On souhaite montrer la proposition suivante énoncée en cours.

Proposition (II). *Si P est calculé par une formule arithmétique d'arité 2 de taille s et de degré syntaxique δ alors, il existe une formule d'arité non bornée de taille poly(s) et profondeur $O(\log \delta)$ qui calcule P.*

5. On généralise ici le résultat de la question 2. Une formule (d'arité 2) est dite oblique, si chaque porte de multiplication est de la forme $a = b \times u$ où u est une variable ou une constante.

Montrer par récurrence que si F est une formule oblique de profondeur Δ, de portes d'arité 2 telle que ses feuilles sont étiquetées par des variables toutes distinctes, alors le polynôme calculé par F a au plus 2^{Δ} monômes et est de degré au plus 1 en chaque variable. De plus, si le parent β d'une variable dans F est une porte $+$ ou si le parent β est une porte $\times$ telle que tous les enfants de β sont des feuilles, alors la variable n'apparait que dans un seul monôme.

6. Soit $p > 0$ un entier. Pour chaque porte α d'une formule F, on associe son potentiel $\Phi_p = \lceil \log \delta(\alpha) \rceil + \lceil \Gamma_\alpha / p \rceil$ où Γ_α est la profondeur du sous-arbre de F enraciné en α.

Considérons la formule G_p où on remplace chaque sous-arbre connexe maximal de portes de même potentiel par une formule $\sum\prod$ de profondeur 2.

Montrer que si F est une formule de taille s et degré syntaxique δ, alors $G_{\lceil \log s / \log \delta \rceil}$ est une formule qui calcule le même polynôme de profondeur $O(\log \delta)$ et de taille $\mathrm{poly}(s)$.